Leçon 213 : Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

Développements :

Densité des polynômes orthogonaux, Optimisation dans un Hilbert.

Bibliographie :

Hirsch Lacombe, OA, Rouvière, Gourdon, Faraut, Brézis.

Rapport du jury :

Il est bon de connaître et savoir justifier le critère de densité des sous-espaces par passage à l'orthogonal. Il faut aussi illustrer la leçon par des exemples de bases hilbertiennes (polynômes orthogonaux, séries de Fourier, ...).Il est important de faire la différence entre base algébrique et base hilbertienne. De plus, la formule de la projection orthogonale sur un sous espace de dimension finie d'un espace de Hilbert doit absolument être connue de même que l'interprétation géométrique de la méthode de Gramm-Schmidt. Le théorème de projection sur les convexes fermés (ou sur un sous-espace vectoriel fermé) d'un espace de Hilbert H est régulièrement mentionné. Les candidats doivent s'intéresser au sens des formules $x = \sum < x, e_n > e_n$ $||x||^2 = \sum | < x, e_n > |^2$. en précisant les hypothèses sur la famille (e_n) et en justifiant la convergence. La notion d'adjoint d'un opérateur continu peut illustrer agréablement cette leçon. Pour aller plus loin, le programme permet d'aborder la résolution et l'approximation de problèmes aux limites en dimension 1 par des arguments exploitant la formulation variationnelle de ces équations. Plus généralement, l'optimisation de fonctionnelles convexes sur les espaces de Hilbert peut être explorée. Enfin, le difficile théorème spectral pour les opérateurs auto-adjoints compacts peut être abordé.

1 Vieux jury

Le théorème de projection sur les convexes fermés (ou sur un sous-espace vectoriel fermé) d'un espace de Hilbert H est régulièrement mentionné. En revanche, la possibilité de construire de façon élémentaire le dit-projeté dans le cas particulier d'un sous-espace vectoriel de dimension finie semble inconnue de nombreux candidats.

Remarque 1. *On se place dans E un K-espace vectoriel avec $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*

2 Espaces hilbertiens

2.1 Structure préhilbertienne

Définition 2 (Hirsch Lacombe p84)**.** *Produit scalaire : Forme sesqui-linéaire sur H hermitienne, définie positive.*

Définition 3 (Hirsch Lacombe p84)**.** *Espace préhilbertien : espace vectoriel muni d'un produit scalaire*

Exemple 4 (Hirsch Lacombe p84)**.** $\mathbb{R}^n$*,* C^n*,* L^2*,* l^2*.*

Proposition 5 (Hirsch p86)**.** *Inégalité de Cauchy-Schwarz avec cas d'égalité.*

Corollaire 6 (Hirsch p86)**.** *La relation $||x|| = \sqrt{< x, x >}$ définit une norme.*

Application 7 (Hirsch p87)**.** *Ainsi, pour $\phi_y(x) :=< x, y >$, $||\phi_y|| = N(y)$. L'application $y \in E \mapsto \phi_y \in E'$ est donc une isométrie.*

Remarque 8. *C'est parfois plus facile de montrer qu'une norme est issue d'un p.s plutôt que de montrer que c'est une norme directement.*

Proposition 9 (Hirsch p86)**.** *Formules de polarisation.*

Proposition 10 (Hirsch p87)**.** *Identité du parallélogramme.*

Proposition 11 (Hirsch p87)**.** *Une norme provient d'un produit scalaire si et seulement si elle vérifie l'identité du parallélogramme.*

Remarque 12. *Sur $C([0, 1])$, la norme infinie ne découle pas d'un produit scalaire (prendre $f = id$ et $g = 1$).*

Définition 13 (Hirsch p88)**.** *Espace de Hilbert.*

Exemple 14 (Hirsch p88)**.** *Tout espace préhilbertien de dimension finie est un espace de Hilbert.*

Exemple 15 (Hirsch p88)**.** *[OA p92-93] L^2, l^2*

Proposition 16. *Un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert est un Hilbert.*

Contre exemple 17. *$C([0, 1], \mathbb{R})$ muni de $< f, g >= \int_0^1 f(t)g(t)dt$ est un espace préhilbertien non complet.*

Contre exemple 18. *$(C([0, 1], K), < ., . >_{L_2})$ n'est pas un espace de Hilbert car $x \mapsto x^n$ est de Cauchy mais ne converge pas dans $C([0, 1], K)$. (pas fermé dans L^2).*

Contre exemple 19. *$(\mathbb{R}[X], ||.||_2)$ n'est pas complet car pas fermé puisque son adhérence est L^2.*

2.2 Orthogonalité

Définition 20 (Hirsch p87)**.** *Eléments orthogonaux.*

Théorème 21 (Hirsch p88)**.** *Théorème de Pythagore.*

Définition 22 (Hirsch p107)**.** *Famille orthogonale.*

Proposition 23 (Hirsch p107)**.** *Une famille orthogonale dont aucun élément n'est nul est libre.*

Définition 24 (Hirsch p108)**.** *Famille orthogonale.*

Remarque 25. *La réciproque est vraie si* $K = \mathbb{R}$ *mais pas si* $K = \mathbb{C}$.

Définition 26 (Hirsch p87)**.** *Orthogonal d'une partie.*

Proposition 27 (Hirsch p87)**.** $A^\perp$ *en fonction des noyaux.*

Proposition 28 (Hirsch p87)**.** *[OA p99]* $A^\perp$ *est un sev.*

Proposition 29. $A \subset B$ *implique* $B^\perp \subset A^\perp$.

Proposition 30 (Hirsch p87)**.** *[OA p99]* $A^\perp = \overline{A}^\perp = vect(A)^\perp$.

Proposition 31 (OA p99)**.** $A \subset A^{\perp\perp}$.

2.3 Projection sur un convexe fermé

Théorème 32 (Hirsch p91)**.** *Théorème de projection sur un convexe fermé non vide. (4 résultats).*

Exemple 33 (Hirsch p94)**.** $d(x, \{a\}^\perp) = \frac{|<x,a>|}{||a||}$.

Exemple 34 (Hirsch p94)**.** *Dans* $L^2[0,1]$, $F = \{f \in E, \int_0^1 f(x)dx = 0\}$. *Si* $f = \exp$ *alors* $d(f, H) = e - 1$.

Contre exemple 35. $H = \mathbb{R}$, $C = \{0, 1\}$ *et* $x = 1/2$ *;* $H = \mathbb{R}$, $C =]0, 1[$, *et* $x = 2$ *;* $H = C([0, 1])$ *muni de la norme 2,* $C = \{f \in H, f = 0 sur [0, 1/2]\}$.

Contre exemple 36. $H = (C([0, 1]), ||.||_2)$ *est non complet,* $F_1 = 1^\perp_{[0,1/2]} \cap C([0, 1]))$ *est fermé et comme* $d(x, F_1) = d(x, 1^\perp_{[0,1]})$, *cette distance est atteinte en un point non continu donc distance non atteinte dans* H.

Contre exemple 37. $H = (L^2, ||.||_2)$ *est complet,* $C = \mathbb{R}[X]$ *non fermé car dense, distance non atteinte.*

Application 38 (Rouvière p384)**.** *Moindres carrés (régression linéaire).*

Application 39 (OA)**.** *Polynômes de meilleure approximation.*

Projection sur $\mathbb{R}_n[X]$ *dans le préhilbertien* $(C([0, 1]), ||\Delta||_2)$.

Remarque 40. *Regarder OA p98.*

Exemple 41 (FGN An 3)**.** *[Nourdin p51] Calcul du minimum d'une intégrale.*

Corollaire 42 (Hirsch p93)**.** *Théorème du supplémentaire orthogonal.*

Contre exemple 43 (OA p98)**.** *Absence de complétude.*

Corollaire 44 (Hirsch p93)**.** *Critère de densité.*

Corollaire 45 (Hirsch p94)**.** $\overline{F} = F^{\perp\perp}$.

Proposition 46 (OA p99)**.** *[Hirsch ?] Expression du projeté orthogonal sur un sev de dimension finie dont on a une base orthonormée.*

Application 47 (OA p99)**.** *[Hirsch p112] Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. (+Dessin OA p108) Ici ou dans la définition des bases hilbertiennes ?*

Théorème 48 (Hirsch p96)**.** *Théorème de représentation de Riesz.*

Application 49. *Définition du gradient, du produit vectoriel, de l'adjoint.*

Proposition 50. *Optimisation dans un Hilbert.*

3 Bases hilbertiennes, exemples et applications

3.1 Définition et exemples

Remarque 51. *On se place sur un espace de Hilbert séparable pour ne pas avoir à traiter des familles sommables (on parle de celles-ci juste à l'oral.).*

Notons que les bases hilbertiennes sont définies dans un cadre préhilbertien seulement ; rajouter de la complétude donne quelques résultats en plus. A bien distinguer du concept de base algébrique.

Définition 52 (Hirsch p108)**.** *[OA p107] Base hilbertienne.*

Remarque 53 (OA p107)**.** *Base hilbertienne et base algébrique.*

Remarque 54 (Gourdon)**.** *Une base algébrique ne peut être dénombrable.*

Exemple 55 (Hirsch p108)**.** *Famille des* (e_i) *dans* l^2.

Proposition 56 (OA p108)**.** *Tout espace de Hilbert admet une base hilbertienne. (Zorn)*

Proposition 57 (OA p108)**.** *Tout espace de Hilbert séparable admet une base hilbertienne dénombrable.*

Corollaire 58 (Hirsch p112)**.** *Un espace préhilbertien est séparable si et seulement si il admet une base hilbertienne dénombrable.*

3.2 Propriétés et caractérisations

Proposition 59 (Hirsch p109)**.** *Projection orthogonale de x sur l'espace engendré par une famille orthogonale finie.*

Proposition 60 (Hirsch p109)**.** *Inégalité de Bessel.*

Proposition 61 (Hirsch p109)**.** *[OA p109] Egalité de Bessel-Parseval et autres équivalences.*

Théorème 62 (Hirsch p111)**.** *Décomposition d'un élément dans une base hilbertienne. (sens de la limite dans OA).*

3.3 Base hilbertienne de polynômes orthogonaux

Proposition 63 (OA p140)**.** *[Candel p109] Densité des polynômes orthogonaux.*

Application 64 (OA p112)**.** *Base hilbertienne de L^2.*

Remarque 65. *Développer davantage.*

3.4 Bases hilbertiennes en analyse de Fourier

Remarque 66. *Utiliser plutôt Faraut.*

Définition 67 (OA p122)**.** *[Faraut p148] $L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$ et le produit scalaire associé.*

Définition 68 (OA p122)**.** e_n.

Définition 69 (OA p122)**.** *Coefficients de Fourier pour $f \in L^2$ et somme partielle.*

Proposition 70 (OA p123)**.** *Expression de $c_n(f)$ dans L^2.*

Proposition 71 (OA p123)**.** *(e_n) est orthonormée.*

Proposition 72 (OA p123)**.** *S_N est la projection orthogonale de f sur P_N.*

Corollaire 73 (OA p123)**.** *La famille (e_n) forme une base hilbertienne de L^2.*

Corollaire 74 (OA p124)**.** *$S_N(f)$ tend vers f en norme 2.*

Corollaire 75 (OA p124)**.** $||f||_2 = \sum |c_n(f)|$.

Corollaire 76. *L^2 est isométrique à l^2.*

Application 77 (OA p124)**.** *[ZQ][Faraut p151] Calculs de sommes.*

Proposition 78 (Gourdon p240)**.** *Si f est holomorphe alors $\int_0^1 |f(re^{2i\pi t}|^2 \mathrm{d}t = \sum |a_n|^2 r^{2n}$.*

4 Le Hilbert H^1

Remarque 79. *On présente un espace de Hilbert particulier, qui un cadre assez général dans lequel se placer pour la résolution d'EDP.*

Remarque 80. *A voir*